Комплексный анализ, семинар 3 24.02.2012

1. Пусть C – простой замкнутый спрямляемый контур, не проходящий через точки $0, 1, 2$. Вычислите все возможные значения интеграла

$$\int\limits_C \frac{dz}{z(z-1)(z-2)}$$

при различных положениях контура C.

2. Согласно теореме Лиувилля, целая ограниченная в $\mathbb{C}$ функция постоянна. Докажите эту теорему, вычислив интеграл

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)}$$

при $|a| < R$, $|b| < R$ и произведя его оценку при $R \to \infty$.

3. Используя теорему Лиувилля, докажите основную теорему алгебры.

4. *Трансфинитный диаметр.* Для набора $\boldsymbol{z}$ из $n \geq 2$ различных комплексных чисел $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ положим

$$L_n(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{j \neq k} \log \frac{1}{|z_j - z_k|}.$$

Для бесконечного компактного множества $E \subset \mathbb{C}$ положим

$$\mathcal{L}_n(E) = \min L_n(\boldsymbol{z}),$$

где минимум берется по всевозможным наборам $\boldsymbol{z}$ из n различных точек множества E. Число

$$\mathcal{D}(E) = \lim_{n\to\infty} e^{-\mathcal{L}_n(E)}$$

называется трансфинитным диаметром множества E.

1) Докажите, что для любого бесконечного компактного множества $E \subset \mathbb{C}$ последовательность $\{\mathcal{L}_n(E)\}$ является невозрастающей.

2) Вычислите трансфинитный диаметр отрезка $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$.

5. Покажите, что для полинома $f(z)$ с различными корнями и подходящего выбора (какого именно?) контура интегрирования γ интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z)}\,dz$$

является корнем полинома $f(z)$.

6. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в замыкании области, ограниченной спрямляемым контуром C, пусть $z_1, \ldots, z_n$ – различные точки внутри контура C и $\omega_n(z) = (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$. Покажите, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)} \frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

есть многочлен степени $n-1$, значения которого в точках $z_1, \ldots, z_n$ совпадают со значениями функции $f(z)$ в этих точках.